Mini-apunte
de Análisis Matemático II

1. EDO 1ra parte

Definición 1.1 (ED)**.** Una **Ecuación Diferencial** es una ecuación en la que intervienen una o más variables independientes, una variable dependiente y sus derivadas hasta un cierto orden.

Definición 1.2 (EDO)**.** Cuando sólo interviene una única variable independiente se dice que es una **Ecuación Diferencial Ordinaria**

Las mismas se pueden expresar como

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Definición 1.3 (FC)**.** Una **Familia de Curvas** es una ecuación en la que interviene una variable independiente, una variable dependiente, y una o mas constantes arbitrarias.

Las mismas se pueden expresar como

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$$

Definición 1.4 (Orden)**.** Tanto las ecuaciones diferenciales como las familias de curvas tienen un orden.

- El **orden de una EDO** es el orden de la derivada de mayor orden de la ecuación.
- El **orden de una FC** es la cantidad de constantes arbitrarias esenciales de la ecuación

Definición 1.5 (Soluciones)**.** Una solución de una EDO es una función que satisface dicha ecuación.

Clasificamos tres tipos de soluciones

1. La **solución general** es una familia de curvas del mismo orden que la EDO, y que la verifica.

2. Una **solución particular** es una curva que se deduce de asignar valores a todas las constantes arbitrarias de la SG.
3. Una **solución singular** es una curva que verifica la EDO pero no se deduce de la SG asignando valores a sus constantes.

Definición 1.6 (Variables Separables)**.** Una EDO se dice que es de **variables separables** si mediante operaciones algebraicas se la puede llevar a la forma

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}$$

Equivaléntemente, con la notacion de Leibniz

$$q(y)dy = p(x)dx$$

Definición 1.7 (Lineal)**.** Una **ecuación diferencial lineal** es aquella que se puede expresar como

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

La ecuación diferencial **homogenea asociada** es

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Una **ecuación diferencial lineal de 1er orden**, es aquella que se puede expres como

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Definición 1.8 (Flia $\perp$)**.** Dos familias de curvas se dicen **ortogonales** si cada vez que se cruza una curva de una flía con una curva de la otra flía, las rectas tangentes en dicho punto son ortogonales.

Para obtener la flía de curvas ortogonal a una flía dada, primero buscamos su EDO, luego cambiamos y' por $-1/y'$, y finalmente resolvemos la EDO resultante.

2. Topología de $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 ($\mathbb{R}^n$)**.** Recordemos que dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, su **producto escalar** es

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$$

Dado $v \in \mathbb{R}^n$, definimos su **norma** como

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

y dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, definimos su **distancia** como

$$d(v, w) = ||w - v||$$

$$= \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + \ldots + (w_n - v_n)^2}$$

y su **ángulo** como

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||\ ||\vec{w}||}$$

Definición 2.2 (Entorno)**.** Llamamos **entorno** (abierto) de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ al conjunto

$$E(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$$

El **entorno cerrado** de centro x_0 y radio $r > 0$ incluye la frontera

$$E[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$$

El **entorno reducido** de centro x_0 y radio $r > 0$ excluye su centro

$$E^*(x_0, r) = E(x_0, r) - \{x_0\}$$

Definición 2.3 (Puntos)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces decimos que x respecto de A es

- **Punto interior**: Si existe $E(x, \delta) \subseteq A$.

  Al conjunto de puntos interiores lo denotamos A°.

- **Punto exterior**: Si existe $E(x, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n - A$. Equivaléntemente $E(x, \delta) \cap A = \emptyset$.

  Al conjunto de puntos exteriores lo denotamos $ext(A)$.

- **Punto frontera**: Si no es punto interior ni exterior. Es decir que para todo $\delta > 0$ se tiene $E(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ y $E(x, \delta) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset$

  Al conjunto de puntos frontera lo denotamos δA

- **Punto clausura** (o adherencia): Si para todo $r > 0$ se tiene $E(x, r) \cap A \neq \emptyset$

  Al conjunto de puntos clausura lo denotamos $\overline{A}$

- **Punto de acumulación** (o punto límite): Si para todo $r > 0$ se tiene $E(x, r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

  Equivaléntemente, si para todo $r > 0$ se tiene $E^*(x, r) \cap A \neq \emptyset$

  Al conjunto de puntos de acumulación lo denotamos A'

- **Punto aislado**: Si existe $r > 0$ tal que $E(x, r) \cap A = \{x\}$

  Al conjunto de puntos aislados lo denotamos $aisl(A)$

Definición 2.4 (Abierto)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que A es un conjunto

- Abierto: Si $A = A^\circ$. Es decir si todos los puntos del conjunto son interiores.

- Cerrado: Si $A = \overline{A}$. Es decir si todos los puntos de clausura pertenecen al conjunto.

  Equivaléntemente

  - Contiene a todos sus puntos frontera.
  - Contiene a todos sus puntos de acumulación.
  - El complemento es abierto.

Definición 2.5 (Acotado)**.** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es un **conjunto acotado** si el mismo está contenido en algún entorno del origen, es decir si $A \subseteq E(0,r)$ para algún $r > 0$.

Definición 2.6 (Camino)**.** Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, un **camino** de a a b es una función $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ contínua, tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$

Definición 2.7 (Arco-Conexo)**.** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es un **conjunto (arco)-conexo** si para todos los $a, b \in A$ existe un camino α que une a con b dentro del conjunto, es decir tal que $\alpha([0,1]) \subseteq A$.

Definición 2.8 (Convexo)**.** Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es un **conjunto convexo** si para todo $a, b \in A$ el camino recto que los une no se sale del conjunto, es decir $[a, b] \subseteq A$.

Definición 2.9 (Símplemente convexo)**.** Intuitivamente, un conjunto es **símplemente conexo** si toda curva cerrada simple (curva de Jordan) se puede "deformar contínuamente"(sin salirse del conjunto) hasta llegar a un punto. En $\mathbb{R}^2$ esto sería equivalente a decir que el conjunto no tiene agüjeros.

Definición 2.10 (Funciones)**.** Sea f una función de la forma $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

- Si $n = m = 1$ es una **función escalar**.
- Si $n = 1$ y $m > 1$ es una **función vectorial**.
- Si $n > 1$ y $m = 1$ es un **campo escalar**.
- Si $n > 1$ y $m > 1$ es un **campo vectorial**.

Definición 2.11 (Conjunto de nivel)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, y sea $k \in \mathbb{R}$

El **conjunto de nivel** k **de** f es la preimágen de k por f

$$C_k(f) = f^{-1}(k)$$

Es decir,

$$C_k(f) = \{x \in A : f(x) = k\}$$

3. Límite y Continuidad

Definición 3.1 (Límite)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A'$, y $L \in \mathbb{R}^n$. Se dice que existe el **límite de** f **cuando** x **tiende a** x_0 y vale L si se cumple que:

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$, $0 < \lvert\lvert x - x_0 \rvert\rvert < \delta$ entonces $\lvert\lvert f(x) - L \rvert\rvert < \epsilon$

En ese caso denotamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Definición 3.2 (Continuidad)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea $x_0 \in A$. Se dice que f es **contínua en** x_0 si se cumple que

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$, $\lvert\lvert x - x_0 \rvert\rvert < \delta$ entonces $\lvert\lvert f(x) - f(x_0) \rvert\rvert < \epsilon$

Notar que si $x_0 \in A$, que sea continua en x_0 equivale a decir que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema 3.3 (Compuesta)**.** *Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ es contínua en $a \in A$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es contínua en $b = f(a)$, entonces $h = g \circ f$ es contínua en a.*

Observación 3.4 (Polinomios)**.** Funciones polinómicas, trigonométricas y exponenciales son contínuas.

Además, suma, producto, diferencia y cociente de continuas es continua (salvo en los puntos donde se divide por cero que no queda definida la función)

Observación 3.5. Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene funciones coordenadas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ entonces f es contínua en a si y solo sí cada componente f_i es contínua en a para todo $1 \leq i \leq m$.

Teorema 3.6. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $a \in A'$, entonces el límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe si y sólo si existen todos los límites $\lim_{x \to a} f_i(x) = L_i$ con $1 \leq i \leq m$, y en dicho caso se tiene $L = (L_1, \ldots, L_m)$*

Proposición 3.7 (Infinitésimo por acotada). *Sean* $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, y* $a \in A'$*.*

Si f *es acotada, es decir* $f(A)$ *un conjunto acotado, y si* g *es infinitésimo, es decir* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *entonces* $h = f \cdot g$ *es infinitésimo, es decir* $\lim_{x\to a} h(x) = 0$

Teorema 3.8 (Por subconjunto). *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,* $a \in A'$*. Sea* $B \subseteq A$ *con* $a \in B'$

- *Supongamos que existe*
  $\lim_{x\to a, x\in B} f(x) = L_B$
  Entonces (si existe) $\lim_{x\to a} f(x) = L_B$
  Si además $a \in B^\circ$ *entonces existe*
  $\lim_{x\to a} f(x) = L_B$*.*
- *Supongamos que existe* $\lim_{x\to a} f(x) = L$*, entonces* $\lim_{x\to a, x\in B} f(x) = L$*.*

Teorema 3.9 (Por subconjuntos finitos). *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*,* $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$*, con* $a \in A_i'$ *para todo* $1 \leq i \leq k$*.*

Si existen y son iguales los límites
$\lim_{x\to a, x\in A_i'} f(x) = L$
Entonces existe el límite
$\lim_{x\to a} f(x) = L$

4. Derivabilidad

Definición 4.1 (Derivadas). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A^\circ$, y sea $v \in \mathbb{R}^n$.

Definimos la **derivada de f en x_0 respecto al vector** v como

$$f_v'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

si dicho límite existe. Sino, decimos que f no es derivable en x_0 respecto a v.

Si además v es un versor, decimos que es la **derivada direccional de f respecto a** v.

Si además de ser versor, v es versor canónico, digamos respecto a la variable x_i, decimos que es la **derivada parcial de f respecto a** x_i

Otras notaciones:
$f_v'(x_0) = f'(x_0, v) = D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

Proposición 4.2 (Homogeneidad)**.** *Sea $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, y supongamos que existe la derivada direccional $f'(x_0, v)$.*

Entonces

$$f'(x_0, kv) = kf'(x_0, v)$$

Definición 4.3 (C^k)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si existen y son continuas todas sus derivadas parciales hasta el orden k, decimos qur f es de clase C^k.

Teorema 4.4 (Schwarz)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, de clase C^k. Entonces todas las derivadas parciales de f de hasta orden k no dependen del orden de derivación.*

En particular si $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es clase C^2, entonces $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Observación 4.5. Si f no es clase C^2 entonces el orden de derivación puede cambiar el resultado. Por ejemplo sea $g(x, y) = x^2 \arctan(y/x) - y^2 \arctan(x/y)$, luego para

$$f(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

en $(0, 0)$ se tiene que

$$f''_{xy}(0, 0) = -1 \neq +1 = f''_{yx}(0, 0)$$

Definición 4.6 (Curva regular)**.** Llamamos **curva** a la imagen de una función contínua $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con I conexo.

Se dice que g es una **curva paramétrica**, o una parametrización de la curva.

Sea $t_0 \in I$, si g es clase C^1 y existe $v = g'(t_0) \neq \vec{0}$ decimos que $x_0 = g(t_0)$ es un **punto regular de la curva paramétrica**.

En este caso queda definida la recta tangente

$$x = x_0 + \lambda v$$

Si todos sus puntos son regulares decimos que la curva paramétrica es regular.

Definición 4.7 (Superficie regular)**.** Llamamos **superficie** a la imagen de una función $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con A conexo.

Se dice que g es una **superficie paramétrica**, o una parametrización de la superficie.

Sea $(u_0, v_0) \in A$, si g es de clase C^1 y $n = g'_u(u_0, v_0) \times g'_v(u_0, v_0) \neq 0$ decimos que $x_0 = g(u_0, v_0)$ es un **punto regular de la superficie paramétrica**.

En este caso queda definida el plano tangente

$$(x - x_0) \cdot n = 0$$

Si todos sus puntos son regulares decimos que la superficie paramétrica es regular.

5. Diferenciabilidad

Definición 5.1 (Diferenciabilidad)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea $x_0 \in A^\circ$.

Se dice que f es **diferenciable en** x_0 si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)}{||h||} = 0$$

A la transformación lineal T la llamamos el **diferencial de** f **en** x_0, y la denotamos $df(x_0)$. Y a su matriz asociada en las bases canonicas la llamamos matriz jacobiana y la denotamos $Df(x_0)$.

Teorema 5.2 (Derivable)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $x_0 \in A^\circ$*.*

Entonces $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$f'(x_0, v) = Df(x_0) \cdot v$$

Demostración. Por notación

$Df(x_0) \cdot v = df(x_0)(v) = T(v)$.

Si $v = 0$ el teorema es obvio. Supongamos $v \neq 0$.

$||\frac{f(x_0+kv)-f(x_0)}{k} - T(v)||$

$= ||\frac{f(x_0+kv)-f(x_0)-kT(v)}{k}||$

$= \frac{||f(x_0+kv)-f(x_0)-T(kv)||}{|k|}$

$= ||v|| \frac{||f(x_0+kv)-f(x_0)-T(kv)||}{||kv||} \to 0$ cuando $k \to 0$ pues f es diferenciable en x_0.

Esto prueba que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0 + kv) - f(x_0)}{k} = T(v)$$

□

Corolario 5.3. *Si f es diferenciable en x_0, el diferencial es único, y su matriz jacobiana se escribe poniendo las derivadas parciales como columnas, pues*

$$f'_{x_i} = f'(x_0, e_i) = Df(x_0) \cdot e_i$$

Definición 5.4 (Gradiente)**.** En el caso particular de que el campo sea escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la matriz jacobiana es una matriz fila, y llamamos gradiente de f en x_0 y denotamos $\nabla f(x_0)$ al vector que tiene esos coeficientes como coordenadas. Es decir sus coordenadas son las derivadas parciales de f en x_0

$$\nabla f(x_0) = (f'_{e_1}(x_0), f'_{e_2}(x_0), \dots, f'_{e_n}(x_0))$$

En este caso el teorema 5.2 nos dice que si f es diferenciable en x_0 entonces

$$f'(x_0, v) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Teorema 5.5 (Continuo)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, entonces f es contínuo en x_0.*

Demostración. $||f(x_0 + h) - f(x_0)||$
$= ||f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h) + T(h)||$
$\leq ||f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)|| + ||T(h)||$
$= ||h|| \frac{||f(x_0+h)-f(x_0)-T(h)||}{||h||} + ||T(h)|| \to 0$ cuando $h \to 0$ por ser f diferenciable en x_0.

O sea que

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Sustituyendo $x = x_0 + h$ queda $h = x - x_0$, y cuando $h \to 0$ se tiene $x \to x_0$, reemplazando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

es decir que f es contínua en x_0. □

Observación 5.6 (Aprox. lineal)**.** Sea f dif en x_0. Es decir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h)}{||h||} = 0$$

luego en particular
$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h) = 0$
sustituyo $x = x_0 + h$

$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) = 0$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + T(x-x_0)$
Es decir que para $x \sim x_0$ resulta
$f(x) \sim f(x_0) + T(x-x_0)$
Llamamos aproximacion lineal de f en x_0 a la expresión
$f(x_0) + T(x-x_0)$
En el caso de campo escalar queda
$f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x-x_0)$
En el caso de $\mathbb{R}^2$ queda
$f(x_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
La ecuación
$z = f(x_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$
es el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en (x_0,y_0).

Teorema 5.7 (Polinomios)**.** *Funciones polinómicas, trigonométricas y exponenciales son diferenciables en todo su dominio.*

Suma, resta, multiplicación y división de funciones diferenciables es diferenciable.

Teorema 5.8 (C^1)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1. Entonces f es diferenciable en todo su dominio.*

Observación 5.9. No vale la vuelta, es decir una función puede ser diferenciable y aún así no ser clase C^1.

Por ejemplo, la siguiente función es diferenciable en $\mathbb{R}$, pero su derivada $f'(x)$ no es contínua en el origen.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Proposición 5.10 (Deriv. maxima)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A^\circ$.*

Si $\nabla f(x_0) = 0$ todas las direcciones son de derivada máxima, mínima y nula.

Si $\nabla f(x_0) \neq 0$. Entonces:

- *Hay una única dirección de máxima derivada direccional y es $r_{max} = \frac{\nabla f(x_0)}{||\nabla f(x_0)||}$ con valor $||\nabla f(x_0)||$.*
- *Hay una única dirección de mínima derivada direccional y es $r_{min} = -r_{max}$ con valor $-||\nabla f(x_0)||$.*
- *Si además $n = 2$, digamos $\nabla f(x_0) = (a,b)$, entonces hay exactamente dos direcciones de derivada direccional nula y son $r_1 = \frac{(-b,a)}{||(-b,a)||}$ y $r_2 = -r_1$*

Teorema 5.11 (Regla de la cadena). *Sean*

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ *diferenciable en* $x_0 \in A^\circ$
$g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *diferenciable en* $y_0 = f(x_0) \in B^\circ$
Entonces $h = g \circ f$ *es diferenciable en* x_0*, y además*

$$Dh(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$$

Teorema 5.12 (Normal). *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* $x_0 \in A^\circ$*. Entonces* $\nabla f(x_0)$ *es perpendicular al conjunto de nivel* $f(x_0)$ *de* f*.*

Demostración. Sea C el conjunto de nivel $f(x_0)$ de f, es decir los $x \in A$ tales que

$$f(x) = f(x_0)$$

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ un vector tangente a dicho conjunto de nivel. Es decir existe $g : I \to C$ parametrización de una curva regular en $x_0 = g(t_0)$ tal que $g'(t_0) = v$.

Por otro lado la compuesta queda constante, es decir

$$f(g(t)) = f(x_0) \ \ \forall t \in I$$

Aplicando la regla de la cadena
$\nabla f(x_0) \cdot g'(t_0) = 0$
$\nabla f(x_0) \cdot v = 0$
Es decir $f(x_0) \perp v$. □

6. Compuesta e Implícita

Compuesta la di en la unidad anterior porque es util saber que el gradiente es normal al conjunto de nivel para calcular planos tangentes a superficies y usarlos para la aproximación lineal.

Teorema 6.1 (Implícita). *Sea* $F : W \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1*. Escribiendo las coordenadas de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *como* (x, y) *con* $x \in \mathbb{R}^n$*,* $y \in \mathbb{R}$*, tenemos que* $z = F(x, y)$*.*

Sea $(a, b) \in W$ *(con* $a \in \mathbb{R}^n$*,* $b \in \mathbb{R}$*) tal que* $F(a, b) = 0$*, y que* $F'_y(a, b) \neq 0$*.*

Entonces existen un entorno A *de* a*, un entorno* B *de* b*, y una función* $f : A \to B$ *tal que* $f(a) = b$*, y*

$$F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in A$$

En este caso decimos que la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a $y = f(x)$ en un entorno de a.

Además vale que f es diferenciable en a y que

$$f'_{x_i}(a) = -\frac{F'_{x_i}(a,b)}{F'_y(a,b)}$$

7. Taylor y Extremos

Definición 7.1 (Taylor)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $c \in A^\circ$.

Decimos que f **es** $k \in \mathbb{N}_0$ **veces diferenciable en** c, si existe un polinomio $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de grado a lo sumo k tal que

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - P(x)}{||x - c||^k} = 0$$

En ese las derivadas parciales hasta orden k de P en c coinciden con las de f en c, de lo cual se deduce que P es único y lo llamamos **polinomio de Taylor de orden** k **de** f **en** c y lo podemos escribir como

$$P(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} d^i f(x)$$

$$= f(c) + df(x) + \frac{1}{2!} d^2 f(x) + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(x)$$

donde $d^i f(x)$ es la parte homogenea de grado i del polinomio, y lo llamamos **diferencial de orden** i **de** f **en** c.

Se cumple además que
$df(x) = f'_{x_1}(c)(x_1 - c_1) + f'_{x_2}(c)(x_2 - c_2) + \ldots + f'_{x_n}(c)(x_n - c_n)$
y recursivamente
$d^0 f(x) = f(c)$
$d^1 f(x) = df(x)$
$d^2 f(x) = d(df(x))$
$\vdots$
$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x))$

Observación 7.2. Ademas en el punto el valor de la funcion y sus derivadas parciales hasta orden k coinciden con las del polinomio. Eso puede ser útil para calcular planos tangentes, y para analizar extremos con el hessiano.

Ejemplo 7.3. Si $n = 2$ y $k = 2$ entonces para $f(x, y)$ en (x_0, y_0) la fórmula queda

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0)+$$
$$+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2$$
$$+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]$$

Definición 7.4 (Extremos)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in A$.

- $f(x_0)$ es el **máximo absoluto de** f si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A$
- $f(x_0)$ es el **mínimo absoluto de** f si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A$
- $f(x_0)$ es **máximo relativo de** f **relativo a** x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A \cap E(x_0, \delta)$ para algún $\delta > 0$
- $f(x_0)$ es **mínimo relativo de** f **relativo a** x_0 si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A \cap E(x_0, \delta)$ para algún $\delta > 0$

Llamamos **extremos** de f a los máximos y mínimos relativos y absolutos de f.

Si $f(x_0)$ es extremo, decimos que f produce extremo en x_0.

Definición 7.5 (Punto crítico / silla)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in A$.

- Decimos que x_0 es **punto crítico** de f si bien f es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) = 0$ (en este caso también se dice que x_0 es **punto estacionario**), o bien si f no es diferenciable en x_0.
- Decimos que x_0 es **punto silla** de f, si es punto crítico, pero f no produce extremo en x_0.

Teorema 7.6 (Condición necesaria)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in A$.*

Si $f(x_0)$ es extremo, entonces x_0 es punto crítico.

Demostración. Sean $v \in \mathbb{R}^n$, $g(t) = x_0 + tv$, y $h(t) = f(g(t))$.

Como $g(0) = x_0$ y f presenta un extremo en x_0, entonces h presenta un extremo en 0.

Además como f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en 0, entonces por la regla de la cadena h es diferenciable en 0 y

$$h'(0) = \nabla f(g(0))g'(0)$$

Y por el criterio de la derivada primera (de Análisis 1) sabemos que debe cumplirse

$$h'(0) = 0$$

O sea que

$$\nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = 0$$

Pero $g'(0) = v$, luego nos queda

$$\nabla f(x_0) \cdot v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Lo cual implica que $\nabla f(x_0) = 0$ como queríamos probar. $\square$

Definición 7.7 (Matriz Hessiana)**.** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$.
La **matriz Hessiana** es la matriz jacobiana del gradiente de f. Es decir:

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \dots & & & \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Notar que como $f \in C^2$, y por el teorema de Schwarz (ver 4.4), la matriz Hf es simétrica.

Definición 7.8 (Matriz definida positiva)**.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica.

- A es definida positiva si $x^tAx > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
- A es semidefinida positiva si $x^tAx \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A es definida negativa si $x^tAx < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \neq 0$.
- A es semidefinida negativa si $x^tAx \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- A es indefinida si no es ninguna de las anteriores. ($\exists y, z \in \mathbb{R}^n$ tales que $y^tAy < 0$ y $z^tAz > 0$)

Teorema 7.9 (Autovalores)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A simétrica.*
Sean $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq n}$ sus autovalores (que son reales por ser A simétrica). Entonces

- *A es definida positiva sii $\lambda_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.*

- A *es semidefinida positiva sii* $\lambda_i \geq 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- A *es definida negativa sii* $\lambda_i < 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- A *es semidefinida negativa sii* $\lambda_i \leq 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$.
- A *es indefinida si no es ninguna de las anteriores. (*$\exists \lambda_i < 0$ *y* $\exists \lambda_j > 0$*).*

Teorema 7.10 (Sylvester)**.** *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A *simétrica,* $\det A \neq 0$ *(ningún autovalor es cero).*

Sean las n *submatrices* $A_p = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ *con* $1 \leq p \leq n$*, y sean* $\det(A_p)$ *los menores principales de* A*. Entonces*

- *Si* $\det(A_p) > 0$ *para* $1 \leq p \leq n$*, entonces* A *es definida positiva.*
- *Si* $(-1)^p \det(A_p) > 0$ *para* $1 \leq p \leq n$*, entonces* A *es definida negativa.*
- *Si no es ninguno de los casos anteriores, entonces* A *es indefinida.*

  (Aunque hay matrices indefinidas con $\det A = 0$*)*

Teorema 7.11 (Criterio del Hessiano)**.** *Sea* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ *y* $x_0 \in A$ *punto crítico.*

- *Si* $Hf(x_0)$ *es definida positiva,* $f(x_0)$ *es mínimo relativo.*
- *Si* $Hf(x_0)$ *es definida negativa,* $f(x_0)$ *es máximo relativo.*
- *Si* $Hf(x_0)$ *es indefinida,* x_0 *es punto silla.*

Juntando con el criterio de Sylvester, si $\det Hf(x_0) \neq 0$

- *Si* $\det(A_p) > 0$ *para* $1 \leq p \leq n$*, entonces* $f(x_0)$ *es mínimo relativo.*
- *Si* $(-1)^p \det(A_p) > 0$ *para* $1 \leq p \leq n$*, entonces* $f(x_0)$ *es máximo relativo.*
- *si no es ninguno de los casos anteriores,* x_0 *es punto silla.*

Para el caso $n = 2$*, nos dice*

- *Si* $\det(Hf(x_0)) > 0$ *hay extremo* $f(x_0)$ *(pues es el producto de dos autovalores del mismo signo)*

  Si $f''_{xx}(x_0) > 0$*, es mínimo relativo, y si* $f''_{xx}(x_0) < 0$ *es máximo relativo.*

- *Si* $\det(Hf(x_0)) < 0$ *entonces* x_0 *es punto silla (pues es el producto de dos autovalores de signo cambiado)*
- *Si* $\det(Hf(x_0)) = 0$*, el criterio no decide (por lo menos un autovalor es cero).*

Teorema 7.12 (Bolzano multivariable)**.** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *contínua, sea* $B = A - C_0(f)$*.*

Entonces en cada componente arco-conexa de B*,* $sg(f)$ *es constante. (*f *no cambia de signo)*

Demostración. Sea D una componente arco-conexa de B, y asumamos que existen $c, d \in D$ con $f(c) < 0$ y $f(d) > 0$. Sea $g : [a, b] \to D$ camino contínuo de $g(a) = c$ a $g(b) = d$ (existe pues D arco-conexo. Considero $h = f \circ g$. Luego h contínua (por composición de continuas), $h(a) = f(g(a)) = f(c) < 0$, $h(b) = f(g(b)) = f(d) > 0$.

Luego por Bolzano de AM1, $\exists e \in (a, b)$ tal que $h(e) = 0$, es decir $f(g(e)) = 0$, o sea encontramos $w = g(e) \in D$ tal que $f(w) = 0$. Absurdo pues $D \subseteq B = A - C_0(f)$ (no puede valer cero porque no cae dentro del conjunto de nivel cero).

El absurdo provino de asumir que existen $c, d \in D$ con $f(c) < 0$ y $f(d) > 0$. Luego, f no cambia de signo en D, es decir en cada componente arco-conexa de B. $\square$

Teorema 7.13 (Por subconjunto)**.** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $a \in A$*. Sea* $B \subseteq A$ *con* $a \in B$

- *Supongamos que* $f(a)$ *es extremo (máx/min, rel/abs) de* $f|_B$*. Entonces (si es extremo)* $f(a)$ *es extremo del mismo tipo (máx/min, rel/abs) de* f*.*

  Si además $a \in B^\circ$*, entonces* $f(a)$ *es extremo relativo (máx/min) de* f*.*
- *Supongamos que* $f(a)$ *es extremo (máx/min, rel/abs) de* f*. Entonces es extremo del mismo tipo (máx/min, rel/abs) de* $f|_B$*.*

Teorema 7.14 (Por subconjuntos)**.** *Sea* $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* $\{A_i\}_{i \in I}$*,* $a \in A_i \subseteq A \ \forall i \in I$

- *Si* $a \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^\circ$ *entonces*

  Si $f(a)$ *es extremo relativo (máx/min) de* $f|_{A_i}$ $\forall i \in I$*, entonces* $f(a)$ *es extremo relativo (máx/min) de* f*.*

- *Si $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces*
  Si $f(a)$ es extremo (máx/min, rel/abs) de $f|_{A_i}$ $\forall i \in I$, entonces $f(a)$ es extremo (máx/min, rel/abs) de f.

8. Integral de línea

Definición 8.1 (Jordan)**.** Estas son algunas definiciones relacionadas con curvas (ver 4.6)

- Dadas dos curvas paramétricas $g_1, g_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, tal que $g_1(1) = g_2(0)$, la **concatenación** de g_1 y g_2 es la curva $g_1 \wedge g_2$ tal que

$$(g_1 \wedge g_2)(t) = \begin{cases} g_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g_2(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

- Una curva paramétrica es **regular a trozos** si es la concatenación de una cantidad finita de curvas paramétricas regulares.
- Una curva paramétrica es **simple** si es inyectiva.
- Una curva paramétrica $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es **cerrada** si $g(a) = g(b)$
- Una curva paramétrica $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se dice cerrada simple, o **curva de Jordan**, si es inyectiva en $[a,b)$ y $g(a) = g(b)$

Definición 8.2 (Integral de línea)**.** Dado un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuo, y dada C una curva paramétrica $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $Im(g) \in A$, definimos la integral de f sobre g como

$$\int_C f \ dc = \int_a^b f(g(t)) \ ||g'(t)||dt$$

donde dc es el diferencial de curva escalar

$$dc = ||g'(t)||dt$$

Definimos la **longitud** de C como la integral de la función constante 1, es decir

$$long(C) = \int_C 1 \ dc = \int_a^b ||g'(t)||dt$$

Dado el campo vectorial $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínuo, definimos la integral (o **circulación**) de h sobre C como

$$\int_C h \cdot dc = \int_a^b h(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

definimos el diferencial de curva vectorial como

$$dc = g'(t)dt$$

En ambos casos decimos que se trata de la integral sobre la curva g desde $g(a)$ hasta $g(b)$

Definición 8.3 (Reparametrización)**.** Sean $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva paramétrica, $\phi : [c, d] \to [a, b] \in C^1$, y $g_2 = g_1 \circ \phi$.

- Si $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$, decimos que g_2 reparametriza a g_1 manteniendo la orientación.
- Si $\phi(c) = b$, $\phi(d) = a$, decimos que g_2 reparametriza a g_1 invirtiendo la orientación.

Teorema 8.4 (Reparametrización)**.** *Sean $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva paramétrica, $\phi : [c, d] \to [a, b] \in C^1$, y $g_2 = g_1 \circ \phi$.*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $g_1([a, b]) \subseteq A$.

- *Sea $h : A \to \mathbb{R}^n$ contínua.*

  Si g_2 reparametriza a g_1 manteniendo la orientación: $\int_{g_1} h = \int_{g_2} h$

  Si g_2 reparametriza a g_1 invirtiendo la orientación: $\int_{g_1} h = -\int_{g_2} h$
- *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ contínua, y a ϕ le agregamos la hipótesis de ser monótona. Entonces*

  $\int_{g_1} f = \int_{g_2} f$

  (sin importar si g_2 cambia o no la orientación de g_1)

Demostración. $\int_{g_2} h = \int_c^d h(g_2(t))g_2'(t)dt$

$= \int_c^d h(g_1(\phi(t)))g_1'(\phi(t))\phi'(t)dt$

Sustituyo

$u = \phi(t)$

$du = \phi'(t)dt$

Si no cambia la orientación

$= \int_a^b h(g_1(u))g_1'(u)du$

$= \int_{g_1} h$

Si cambia la orientación

$= \int_b^a h(g_1(u))g_1'(u)du$

$= -\int_{g_1} h$

La demostración con el campo escalar f es parecida, hay que usar que si es monótona creciente entonces $\phi'(t) \geq 0$ y luego $||\phi'(t)|| = \phi'(t)$, y que si es monótona decreciente entonces $\phi'(t) \leq 0$ y luego $||\phi'(t)|| = -\phi'(t)$, y ese signo se cancela con el de haber dado vuelta los límites de integración, para dar el mismo signo sin importar si cambia la orientación o no. $\square$

Definición 8.5 (Conservativo)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\phi : A \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^1$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(x) = \nabla\phi(x)$$

Decimos que f es un **campo conservativo** (o campo de gradiente) y que ϕ es una **función potencial** (o primitiva) de f.

Teorema 8.6 (Independencia)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ contínua.*

Son equivalentes:

1. *f es conservativo. Es decir existe $\phi : A \to \mathbb{R}^n$, $\phi \in C^1$ tal que $f(x) = \nabla\phi(x)$.*

   (De hecho podemos tomar $\phi(x) = \int_{x_0}^x f$ con $x_0 \in A$ arbitrario, y cualquier curva regular de x_0 a x)

2. *La circulación de f es independiente del camino. Es decir $\forall g : [a, b] \to A$, $\int_g f$ sólo depende de los puntos inicial $g(a)$ y final $g(b)$.*

   De hecho si ϕ es función potencial de f, entonces

$$\int_g f = \phi(g(b)) - \phi(g(a))$$

3. *$\forall g : [a, b] \to A$ regular a trozos, y cerrada, vale que $\int_g f = 0$*

Demostración. Sólo probamos algunas implicaciones

$1 \Rightarrow 2)$ $\int_g f = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

$= \int_a^b \nabla\phi(g(t)) \cdot g'(t)dt$

Si llamamos $h = \phi \circ g$, por la regla de la cadena $h'(t) = \nabla\phi(g(t)) \cdot g'(t)$, luego

$= \int_a^b h'(t)dt$

por el segundo teorema fundamental del cálculo de Análisis I
$= h(b) - h(a)$
es decir
$= \phi(g(b)) - \phi(g(a))$
$2 \Rightarrow 3$) Sea $g : [a, b] \to A$ regular a trozos y cerrada, es decir $g(b) = g(a)$.
Luego $\int_g f = \phi(g(b)) - \phi(g(a)) = \phi(g(a)) - \phi(g(a)) = 0$ □

Teorema 8.7 (Necesaria)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}^n$, con $f \in C^1$ y conservativo. Entonces Df es contínua y simétrica.*

Demostración. Es contínuo pues Df consiste en las derivadas parciales de las funciones coordenadas de f que es C^1.

Es simétrico pues como f es conservativo, $f = \nabla\phi$, y luego $Df = D\nabla\phi = H\phi$ es la matriz Hessiana (ver 7.7) de $\phi \in C^2$, que por el teorema de Schwarz (ver 4.4) debe ser simétrica. □

Teorema 8.8 (Suficiente)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ con matriz jacobiana Df contínua y simétrica. Si A es símplemente conexo, entonces f es conservativo.*

9. Integrales múltiples

Definición 9.1. Los subconjuntos $A \subseteq \mathbb{R}^n$ que se pueden expresar como
$$\begin{cases} f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) & \leq x_n \leq & g_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}) & \leq x_{n-1} \leq & g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}) \\ & \vdots & \\ f_2(x_1) & \leq x_2 \leq & g_2(x_1) \\ a & \leq x_1 \leq & b \end{cases}$$
donde todas las funciones son contínuas se llaman regiones elementales de tipo I de $\mathbb{R}^n$.

Las demás regiones elementales de $\mathbb{R}^n$ surgen de permutar las variables en la definición de región elemental tipo I.

Teorema 9.2 (Fubini)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ región elemental tipo I, y sea $f : A \to \mathbb{R}$ contínua. Definimos la integral de f sobre A como*
$\int_A f = \int_a^b dx_1 \int_{f_2(x_1)}^{g_2(x_1)} dx_2 \ldots \int_{f_n}^{g_n} dx_n$
y análogamente para regiones elementales de otro tipo.

En particular, si una región elemental es de varios tipos a la vez, el orden de integración no cambia el resultado de la integral.

*La **medida** (area, volúmen) de A es la integral de 1, es decir $\int_A 1$*

Teorema 9.3 (Cambio variables)**.** *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ abiertos, $g : B \to A$ biyectiva y diferenciable con inversa g^{-1} también diferenciable.*

$$\int_{A=g(B)} f = \int_B (f \circ g)|\det Dg|$$

Definición 9.4 (Polares)**.** Sea $B = [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, y sea $g : B \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$g(\rho, \phi) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi))$$

Cuyo jacobiano es $|\det Dg| = \rho$, luego el teorema de cambio de variables nos dice

$$\iint_{A=g(B)} f(x, y)dxdy = \iint_B f(g(\rho, \phi))\ \rho\ d\rho d\phi$$

Definición 9.5 (Cilíndricas)**.** Sea $B = [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, y sea $g : B \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$g(\rho, \phi, z) = (\rho\cos(\phi), \rho\sin(\phi), z)$$

Cuyo jacobiano es $|\det Dg| = \rho$, luego el teorema de cambio de variables nos dice

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iiint_B f(g(\rho, \phi, z))\ \rho\ d\rho d\phi dz$$

Definición 9.6 (Esféricas)**.** Sea $B = [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$, y sea $g : B \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$g(\rho, \phi, \theta) = (\rho\cos(\phi)\sin(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\theta))$$

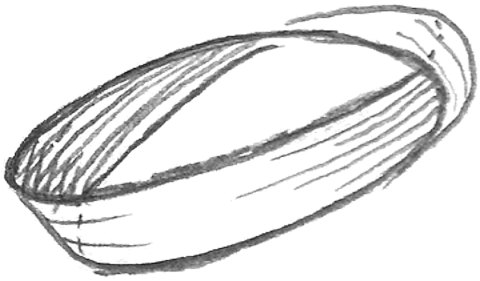
Cuyo jacobiano es $|\det Dg| = \rho^2\sin(\theta)$, luego el teorema de cambio de variables nos dice

$$\iiint_A f(x, y, z)dxdydz = \iiint_B f(g(\rho, \phi, z))\ \rho^2\sin(\theta)\ d\rho d\phi dz$$

10. Integrales de superficie

Definición 10.1 (Sup. orientable)**.** Decimos que una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es orientable si dada una figura bidimensional, como 2 sobre la superficie, la misma no puede moverse continuamente sobre la superficie hasta volver al mismo punto de tal forma que se ve invertida como en un espejo, como S.

Un ejemplo de superficie no orientable es la cinta de Möbius.



Definición 10.2 (Integral superficie)**.** Dado un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínuo, y dada S una superficie paramétrica $g : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to A$, definimos la integral de f sobre g como

$$\iint_S f\ ds = \iint_B (f \circ g)\ ||g'_u \times g'_v||\ dudv$$

donde ds es el diferencial de superficie escalar

$$ds = ||g'_u \times g'_v||\ dudv$$

Definimos el **área** de g como la integral de la función constante 1, es decir

$$area(S) = \iint_S 1\ ds = \iint_B ||g'_u \times g'_v|| dudv$$

Supongamos que la superficie es orientable, y sea el campo vectorial $h : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ contínuo, definimos la integral (o **flujo**) de h sobre S como

$$\iint_S h\ ds = \iint_B (f \circ g)\ (g'_u \times g'_v)\ dudv$$

donde ds es el diferencial de superficie vectorial

$$ds = (g'_u \times g'_v) dudv$$

En este caso decimos que se trata de la integral sobre la superficie S en la orientación dada por $n = (g'_u \times g'_v)$.

Observación 10.3 (Sup. implícita)**.** Sea $G : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G \in C^1$, y sea $S = C_0(G)$, es decir la superficie de ecuación

$$G(x, y, z) = 0$$

y supongamos $G'_z(x, y, z) \neq 0 \ \forall (x, y, z) \in A$

Sea $w : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $w \in C^1$ y tal que $G(x, y, w(x, y)) = 0 \ \forall (x, y) \in B$, y consideremos la superficie S de ecuación $z = w(x, y)$

La podemos parametrizar como

$$g(x, y) = (x, y, w(x, y)) \quad (x, y) \in B$$

Resulta

$$g'_x \times g'_y = (-w'_x, -w'_y, 1)$$

Ademas por Cauchy-Dini

$w'_x = -G'_x/G'_z$

$w'_y = -G'_y/G'_z$

Reemplazando y poniendo $1 = G'_z/G'_z$, podemos escribir

$$g'_x \times g'_y = \frac{\nabla G}{G'_z}$$

Luego si $f : A \to \mathbb{R}$, la integral de f sobre S nos queda

$$\iint_S f \ ds = \iint_B f(x, y, z) \frac{||\nabla G||}{|G'_z|} dxdy$$

Y si $f : A \to \mathbb{R}^3$, el flujo de f sobre S nos queda

$$\iint_S f \cdot ds = \iint_B f(x, y, z) \cdot \frac{\nabla G}{G'_z} dxdy$$

donde en la expresión de la integral se debe eliminar z (que es un abuso de notación) considerando la ecuación $G(x, y, z) = 0$

Definición 10.4 (Aplicación física)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una región de integración (curva, superficie, región plana o espacial).

Sea da el diferencial correspondiente (de curva, superficie, región plana o espacial).

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Sea $P_{x_i} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ (hiperplano coordenado normal al eje x_i)

Sea $\delta : A \to \mathbb{R}$ función densidad de masa.

- La masa total de A es

$$M = \int_A \delta \, da$$

- El momento estático respecto a P_{x_i} es

$$M_{x_i} = \int_A x_i \, \delta \, da$$

- El centro de masa

$$G = \frac{1}{M}(M_{x_1}, \ldots, M_{x_n})$$

- El momento de inercia respecto a P_{x_i} es

$$I_{x_i} = \int_A x_i^2 \, \delta \, da$$

- El momento de inercia respecto al origen

$$I_0 = \int_A (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \, \delta \, da$$

- Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$ y sea $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la distancia a B. El momento estático respecto a B es

$$M_B = \int_A d \, \delta \, da$$

  Y el momento de inercia respecto a B es

$$I_B = \int_A d^2 \, \delta \, da$$

11. Teoremas integrales

Teorema 11.1 (Green)**.** *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y símplemente conexo. Sea $C = \partial D$ curva de jordan regular a trozos orientada positivamente.*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $D \subseteq A$. Sea $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$.
Entonces

$$\oint_{C^+=\partial D} f \cdot dc = \iint_D Q'_x - P'_y \, dxdy$$

En particular si $Q'_x - P'_y = k \neq 0$ esto nos dice que

$$area(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{k} \oint_{C^+} f \cdot dc$$

Ejemplo 11.2. Estos son algunos campos vectoriales que son útiles para calcular areas usando Green, ya que $Q'_x - P'_y = 1$

- $f_1(x, y) = (0, x)$
- $f_2(x, y) = (-y, 0)$
- $f(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$

Teorema 11.3 (Green mult. conexo)**.** *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y símplemente conexo. Sea $C = \partial D$ curva de jordan regular a trozos orientada positivamente.*

Sea $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sean $\{D_i\}_{i \in I}$, $D_i \subseteq D$ compacto y símplemente conexo, y disjuntos dos a dos.

Y sean $C_i = \partial D_i$ curva de jordan regular a trozos orientada positivamente $\forall i \in I$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, $W = D - \bigcup_i D_i \subseteq A$.

Sea $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$

Entonces

$$\iint_W Q'_x - P'_y \, dxdy = \oint_{C^+} f \cdot dc - \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i^+} f \cdot dc$$

Observación 11.4 (Invarianza deformación)**.** Si en el teorema anterior fijamos $n = 1$, y añadimos la hipótesis de Df contínua y simétrica, como $Q'_x = P'_y$, nos queda

$$0 = \oint_{C^+} f \cdot dc - \oint_{C_1^+} f \cdot dc$$

es decir

$$\oint_{C^+} f \cdot dc = \oint_{C_1^+} f \cdot dc$$

lo cual se puede interpretar como que el valor de la integral no cambia si la curva cerrada se cambiar por otra que encierra el mismo hueco D_1.

Volviendo a dejar n genérico, esto nos dice que la integral sólo va a depender de los huecos D_i que encierra la curva.

Teorema 11.5 (Rotor)**.** *Dado $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie compacta, orientable, regular a trozos, símplemente conexa, cuyo borde $C = \partial S$ es una curva de jordan, regular a trozos. Eligiendo orientaciones de S y C de forma que respeten la regla de la mano derecha.*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, $S \subseteq A$. Sea $f : A \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$.

Entonces, si llamamos $rot(f) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$

$$\oint_{C=\partial S} f \cdot dc = \iint_S rot(f) \cdot ds$$

está orientado según la regla de la mano derecha

Teorema 11.6 (Divergencia)**.** *Dado $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sólido compacto, con superficie frontera $S = \partial V$ cerrada, regular a trozos, orientable, y orientada en forma saliente.*

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, $V \subseteq A$. Sea $f : A \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$.

Entonces, si llamamos $div(f) = P'_x + Q'_y + R'_z$

$$\iint_{S^+=\partial V} f \cdot ds = \iiint_V div(f)\, dxdydz$$

Definición 11.7 (Irro, Solen, Armon)**.** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$.

Sea $h : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$.

- Si $rot(f) = 0$ se dice que f es **irrotacional**.
- Si $div(f) = 0$ se dice que f es **solenoidal**.
- Si $div(\nabla h) = 0$ se dice que h es **armónico**.

Proposición 11.8. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^2$.*

Sea $h : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$.

Entonces

- $div(rot(f)) = 0$ *(los campos de rotores son solenoidales)*
- $rot(\nabla h)) = 0$ *(los campos de gradientes son irrotacionales)*

12. EDO 2da parte

Definición 12.1 (Homogénea)**.** Una EDO se dice **homogénea** si se puede expresar como

$$y' = f(x, y)$$

con f homogénea de grado cero, es decir tal que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Se resuelven con sustitución
$y = zx$
$y' = z'x + z$

Definición 12.2 (Tot. exacta)**.** Una EDO se dice **total exacta** si se puede expresar como

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

donde $f = (P, Q)$ resulta conservativo.
Si ϕ es una función potencial de f, su SG viene dada por

$$\phi(x, y) = k$$

Se dice que es la familia de curvas equipotenciales de ϕ.

Definición 12.3 (Factor integrante)**.** Si la EDO

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

no es total exacta, pero al multiplicarla por una función $\mu(x, y)$ se convierte en total exacta, decimos que μ es un **factor integrante**.
Si el factor integrante depende sólo de la variable x, resulta

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}}$$

Si en cambio el factor integrante depende sólo de la variable y, resulta

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}}$$

Definición 12.4 (Lineal coef. ctes)**.** Una EDO se dice lineal de orden n a coeficientes constantes si se puede expresar como

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

es decir

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = g(x)$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall 1 \leq i \leq n$, $a_n \neq 0$, y con $g \in C^\infty$.

La EDO lineal homogenea asociada es

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

es decir

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$$

Proposición 12.5 (Wronskiano)**.** *Sea el espacio vectorial* $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^\infty\}$*.*

Sea $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$*, con* $f_i \in V \ \forall 1 \leq i \leq n$*.*

Llamamos determinante wronskiano a

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \ldots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Luego $W \in C^\infty$*. Si* $W \not\equiv 0$ *(no es la función idénticamente cero), entonces* $\{f_i\}_{1\leq i\leq n}$ *es LI.*

Observación 12.6. Dada la EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

Si buscamos la SG, pero sólo conocemos y_p que es una SP, y conocemos y_h que es una SG pero de la homogenea asociada, entonces la SG buscada podemos escribirla como

$$y = y_h + y_p$$

Demostración. Veamos que es solución, reemplazando en

$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = g(x)$

nos queda

$\sum_{i=0}^{n} a_i (y_h^{(i)} + y_p^{(i)}) = g(x)$

separando la suma

$\sum_{i=0}^{n} a_i y_h^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i y_p^{(i)} = g(x)$

es decir

$0 + g(x) = g(x)$

lo cual prueba que es solución.

Y es la SG pues tiene n constantes esenciales arbitrarias, provenientes de la y_h. □

Observación 12.7 (Subespacio)**.** Sea el espacio vectorial $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^\infty\}$.

La SG de la EDO homogenea asociada

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$$

es un subespacio S del espacio vectorial V.

Además $\dim(S) = n$

Demostración. Sea V el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que son C^∞.

Sea $T : V \to V$, tal que $T(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}$.

Veamos que T es una transformación lineal

- $T(y + z) = \sum_{i=0}^{n} a_i (y + z)^{(i)}$
  $= \sum_{i=0}^{n} a_i (y^{(i)} + z^{(i)})$
  $= \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i z^{(i)}$
  $= T(y) + T(z)$
- $T(\lambda y) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\lambda y)^{(i)}$
  $= \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}$
  $= \lambda\, T(y)$

Luego T es TL, y luego la SG buscada es el núcleo de T, y por lo tanto un subespacio de V.

Falta ver que $\dim(S) = n$. Como $a_n \neq 0$, la ecuación
$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$
se puede reescribir como
$y^{(n)} = \frac{-1}{a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}$
Luego un conjunto de $n + 1$ funciones $\{f_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ de S es LD pues en su wronskiano la última fila es CL de las n primeras, y por lo tanto da $W = 0$. Luego $\dim S \leq n$.

De hecho $\dim S = n$ pues vamos a construir un conjunto B de n funciones LI (es decir una base).

Para ello notemos que si proponemos como solución de la homogenea una exponencial $y = e^{\alpha x}$, al reemplazar en la EDO homogenea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0$$

Obtenemos la **ecuación característica**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0$$

donde

$$P(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \in \mathbb{R}[\alpha]$$

es el **polinomio característico** de grado n, con coeficientes reales.

Por el teo. fund. del álgebra, P tiene n raices contando multiplicidad, y por ser con coeficientes reales, si una raiz $\alpha = a + bi$ es compleja, entonces $\overline{\alpha} = a - bi$ también es raíz de P.

Sean $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n}$ las n raíces de p (algunas pueden estar repetidas pues pueden tener multiplicidad mayor a 1). A cada raíz le vamos a asociar una $f \in C^1$ de la siguiente manera.

En el 1er paso, agarramos los α_i distintos (independiente de su multiplicidad)

Si $\alpha_i \in \mathbb{R}$, le asociamos $f(x) = e^{\alpha_i x}$

Si $\alpha_i = a + bi \in \mathbb{C}$, le asociamos $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$ y $g(x) = e^{ax} \sin(bx)$ a α_i y $\overline{\alpha_i}$ respectivamente.

En el 2do paso, para cada α_i tenemos asociada una función f, consideramos su multiplicidad k, y agregamos a B

Si α_i tiene multiplicidad k, agregamos a B las k funciones f, xf, $x^2 f$, $\ldots$, $x^{k-1} f$.

Terminamos con un conjunto $B = \{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de n funciones, que resulta LI (aunque no lo demostremos), y por lo tanto es base. Es decir que la SG de la homogenea asociada es

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)$$

$\square$

Observación 12.8 (Subesp. $n = 2$)**.** Para resolver la EDO lineal homogenea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Escribimos la ecuación característica

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

Y se dan tres casos posibles

- $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{R}$. En este caso resulta

$$y_h = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$$

- $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \in \mathbb{R}$. En este caso resulta

$$y_h = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

- $\alpha_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$. En este caso resulta

$$y_h = e^{ax}[c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx)]$$

Observación 12.9 (Var. Param)**.** Para encontrar una SP de la no homogenea

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

Podemos usar el método de **variación de parámetros** que es el siguiente:

Dada la SG de la homogenea asociada

$$y_h = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

A los parámetros c_1, c_2 los hacemos variar, es decir los reemplazamos por funciones $c_1(x)$, $c_2(x)$ y nos queda $c_1(x)f_1(x) + c_2(x)f_2(x)$, es decir

$y = c_1 f_1 + c_2 f_2$

al derivar

$y' = c_1' f_1 + c_1 f_1' + c_2' f_2 + c_2 f_2'$

imponemos (buscando armar un sistema de ecuaciones en c_1', c_2'

$c_1' f_1 + c_2' f_2 = 0$

y nos queda

$y' = c_1 f_1' + c_2 f_2'$

derivamos denuevo

$y'' = c_1' f_1' + c_1 f_1'' + c_2' f_2' + c_2 f_2''$

al reemplazar en la EDO no homogenea

$a[c_1' f_1' + c_1 f_1'' + c_2' f_2' + c_2 f_2''] + b[c_1 f_1' + c_2 f_2'] + c[c_1 f_1 + c_2 f_2] = g$

Como f_1, f_2 son soluciones de la homogenea, nos queda

$a[c_1' f_1' + c_2' f_2'] = g$

Es decir para encontrar c_1' y c_2' tenemos que resolver el sistema

$\begin{cases} c_1' f_1 + c_2' f_2 = 0 \\ c_1' f_1' + c_2' f_2' = g/a \end{cases}$

Por ejemplo usando la regla de Cramer y llamando W al wronskiano de $\{f_1, f_2\}$ nos queda

$c_1' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ g/a & f_2' \end{vmatrix}$ y $c_2' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & g/a \end{vmatrix}$

Luego integramos c_1' y c_2' para encontrar una primitiva de cada una, y se reemplazan para obtener la SP

$$y_p = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Observación 12.10 (Coef. indet.)**.** Otro método para encontrar una SP de la no homogenea

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

que resulta práctico en el caso de que $g(x)$ sea combinación lineal de polinomios, exponenciales y trigonométricas es el de **coeficientes indeterminados**, que consiste en escribir una combinación lineal de $g(x)$ y sus derivadas, reemplazarla en la EDO, y tratar de determinar los coeficientes indeterminados de la combinación lineal.

Digamos que la CL propuesta es $c_1f_1+c_2f_2+...+c_kf_k$. Si alguno de los f_i es solución de la homogenea, lo reemplazamos por xf_i, si sigue siendo solución de la homogenea lo reemplazamos por x^2f_i, y así sucesivamente hasta lograr que no sea solución de la homogenea.

Definición 12.11 (Lineas de campo)**.** Dado un campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, una **linea de campo** de f es una curva paramétrica $g : [a, b] \to A$ tal que $g'(t) = f(g(t))$ para todo $a < t < b$.

Es decir es una curva que resulta tangente al campo vectorial en cada punto.

Para $n = 2$, sea $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$. La familia de líneas de campo viene dada por la SG de la EDO

$$y' = Q/P$$

Teorema 12.12 (Equipot)**.** *Dado un campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, con f es conservativo.*

Entonces la familia de curvas equipotenciales es ortogonal a la familia de líneas de campo.

Demostración. Sea ϕ función potencial de f, luego las curvas equipotenciales son

$\phi(x, y) = K$

diferenciando

$\phi'_x dx + \phi'_y dy = 0$

como $\nabla\phi = f = (P, Q)$

$Pdx + Qdy = 0$

es decir

$y' = -P/Q$

Por otro lado la EDO de las líneas de campo es

$y' = Q/P$

Al reemplazar y' por $-1/y'$ en una EDO obtenemos la otra. Esto prueba que las familias de curvas en cuestión son ortogonales.

$\square$